MATHÉMATIQUES

On désigne par μ un paramètre réel, par C une fonction numérique définie sur **R**, continûment dérivable et telle que $C(0) = 0$. On considère l'équation différentielle :

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} - \mu u + C(u) = 0 , \qquad t \geqslant 0 ,$$

dont les solutions, lorsqu'elles existent, sont des applications dérivables $u : [0. \infty[\to \mathbf{R}$.

Dans tout le problème, on admettra que, quelles que soient les données $t_0 \geqslant 0$ et $a \in \mathbf{R}$, l'équation (1) possède au plus une solution satisfaisant à la condition $u(t_0) = a$; on en déduira que toute solution non identiquement nulle de (1) garde un signe strictement constant.

L'existence — qui n'est pas assurée — d'une solution de (1) vérifiant $u(0) = u_0$, sera notée $E(u_0)$. L'objet du problème est, d'une part de mettre en évidence quelques cas où $E(u_0)$ n'a pas lieu, d'autre part, supposant $E(u_0)$ réalisée, d'étudier, dans certaines circonstances, le comportement, lorsque $t \to +\infty$, de la solution qui satisfait à la condition $u(0) = u_0$.

I

1° Étudier d'abord le cas particulier $C(x) = x^3$, en intégrant l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} - \mu u + u^3 = 0, \qquad t \geqslant 0 .$$

On pourra utiliser le changement de fonction inconnue $U = u^{-2}$; vérifier que $E(u_0)$ est toujours réalisée, puis trouver $\lim_{t \to +\infty} u(t)$ en fonction de u_0 et μ.

2° Dans toute la suite de cette partie I, on suppose vérifiées les hypothèses suivantes : $xC(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$; la fonction $x \longrightarrow \frac{C(x)}{x}$ est strictement décroissante pour $x < 0$, strictement croissante pour $x > 0$, avec

$$\lim_{x\to 0}\frac{C(x)}{x}=0\,,\qquad \lim_{|x|\to+\infty}\frac{C(x)}{x}=+\infty\,.$$

Vérifier que l'équation $C(x)-\mu x=0$ possède la seule solution $x=0$ lorsque $\mu\leqslant 0$. Établir que cette équation possède trois solutions $x=0$, $x_\mu>0$ et $x'_\mu<0$ lorsque $\mu>0$.

Dans la suite de cette partie I, on supposera :

$E(u_0)$ est réalisée quel que soit le choix de u_0 dans $\mathbf{R}$.

3° On suppose $\mu<0$. Montrer que la fonction $t\longmapsto e^{-2\mu t}u^2(t)$ est décroissante pour $t\geqslant 0$; en déduire que $\lim_{t\to+\infty}u(t)=0$ quel que soit le choix de u_0.

4° *a*. On suppose $\mu>0$ et $u_0>0$; alors $u(t)>0\quad\forall t\geqslant 0$. Montrer que la fonction $t\longmapsto(u(t)-x_\mu)^2$ est décroissante. En déduire que u est monotone, puis que $l=\lim_{t\to+\infty}u(t)$ et $m=\lim_{t\to+\infty}\frac{du}{dt}$ existent.

b. Montrer que m ne peut prendre que la valeur 0 [écrire

$$u(t)-u_0=\int_0^t u'(\tau)\,d\tau\,,$$

et obtenir une contradiction si $m\neq 0$]. Déduire la valeur de l de ce qui précède.

Quelles conclusions obtient-on si $u_0<0$, $\mu>0$?

5° Étudier le cas $\mu=0$ en s'inspirant des méthodes utilisées dans la question précédente.

II

1° Étudier d'abord le cas $C(x)=x^2$ en intégrant l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt}-\mu u+u^2=0,\qquad t\geqslant 0$$

(on pourra utiliser le changement de fonction inconnue $U=u^{-1}$).

Indiquer en fonction de μ les valeurs de u_0 pour lesquelles $E(u_0)$ a lieu. Lorsque cette condition est satisfaite, trouver $\lim_{t\to+\infty}u(t)$ en fonction de u_0 et μ.

2° Dans toute la suite de cette partie II, on suppose :

$$C(x)\geqslant 0\quad\forall x\in\mathbf{R};\ \lim_{x\to 0}\frac{C(x)}{x}=0;$$

l'application $x\longmapsto\frac{C(x)}{x}$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$; $C(x)$ est équivalent à $|x|^\alpha$, $\alpha>1$, lorsque $|x|\to+\infty$.

Vérifier que, quel que soit $\mu\neq 0$, l'équation $C(x)-\mu x=0$ a deux solutions $x=0$ et x_μ.

3° On étudie le cas $\mu=0$. Montrer alors que toute solution de (1) est décroissante.

a. On suppose $u_0<0$. Montrer qu'il existe T_0, fini ou infini positif, tel que $\lim_{t\to T_0}u(t)=-\infty$. En écrivant $t=-\int_{u_0}^{u}\frac{dv}{C(v)}$, montrer que T_0 est fini. Conclure que $E(u_0)$ n'est pas réalisée pour $u_0<0$.

b. On suppose $u_0\geqslant 0$; admettant $E(u_0)$ réalisée, établir que $\lim_{t\to+\infty}u(t)=0$.

4° On suppose $\mu>0$. Étudier le signe de $\frac{d}{dt}(u-x_\mu)^2$; en déduire que u est monotone.

a. Lorsque $u_0<0$, montrer qu'il existe T_0, fini ou infini positif, tel que $\lim_{t\to T_0}u(t)=-\infty$. En procédant comme au 3°, montrer que T_0 est fini, et conclure que $E(u_0)$ n'a pas lieu pour $u_0<0$.

b. Lorsque $u_0\geqslant 0$, on suppose $E(u_0)$ réalisée. Établir l'existence de $l=\lim_{t\to+\infty}u(t)$ et $m=\lim_{t\to+\infty}\frac{du}{dt}$; montrer que $m=0$ en raisonnant comme au I. 4° *b*, puis trouver l.

5° Quels résultats obtient-on lorsque $\mu<0$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail